

Stima & Identificazione

Compito del 29 Giugno 2015, ore 8:30, Aula 206, Edificio di Santa Marta

Problema 1 - Si consideri il segnale stocastico y_t generato dalla seguente equazione alle differenze:

$$\begin{aligned}y_t - \frac{1}{2}y_{t-1} &= e_t + 2e_{t-2} \\ e_t &= wn(0, 1)\end{aligned}$$

- a) Dire, giustificando la risposta, se tale segnale risulta stazionario.
- b) Determinare, se possibile, un modello ARMA del segnale ed una sua rappresentazione di stato alle innovazioni.
- c) Determinare, se possibile, lo spettro $\Phi_y(z)$ e la densità spettrale $\varphi_y(\omega)$ del segnale.
- d) Determinare la funzione di auto-covarianza $R_y(k)$ del segnale.
- e) Determinare i predittori MMSE $\hat{G}_T(z)$ del segnale a $T = 1, 2, 3$ passi ed i relativi guadagni di predizione η_T .
- f) Determinare un modello AR di ordine minimo che fornisca gli stessi valori di $R_y(0), R_y(1), R_y(2)$ calcolati al punto d).

Problema 2 - Si consideri il segnale a tempo-discreto y_t descritto dal seguente modello

$$\begin{cases} s_t - s_{t-1} = w_{t-2} \\ y_t = s_t + v_t \\ w_t = wn(0, 1) \\ v_t = wn(0, 6) \\ \{w_t\} \perp \{v_k\} \end{cases}$$

- a) Dire se il segnale y_t è stazionario o meno, e valutarne la varianza $\sigma_y^2 = E[y_t^2]$.
- b) Determinarne una rappresentazione di stato, in forma canonica di osservabilità

$$\begin{cases} x_{t+1} &= Ax_t + Dw_t \\ y_t &= Cx_t + v_t \end{cases}$$

- c) Determinare il filtro ottimo del segnale s_t nonché i predittori ottimi ad 1 e 2 passi del segnale y_t valutandone le relative varianze.
- d) Determinare la stima ottima regolarizzata ad un passo, $\hat{w}_{t-1|t}$, del segnale w_t e la relativa varianza.

Problema 3 - Il sistema stocastico a tempo-continuo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 + u + w \\ \dot{x}_2 &= -x_1 \\ y &= x_1 + v \\ w &= wn(0, 1) \\ v &= wn(0, 1) \end{cases}$$

viene campionato con intervallo di campionamento $T = \frac{\pi}{2}$ e ZOH sull'ingresso u .
Determinare le matrici A, B, C, Q, R del modello a dati campionati equivalente:

$$\begin{cases} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + w_k \\ y_k &= Cx_k + v_k \\ w_k &= wn(0, Q) \\ v_k &= wn(0, R) \end{cases}$$

Problema 4 - Una generica densità di probabilità (PDF) $p(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_+$ può essere approssimata con una combinazione lineare convessa (*mistura*) di PDF Gaussiani, ovvero

$$p(x) \cong \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i(x), \text{ con } p_i(\cdot) = \mathcal{N}(\cdot; \hat{x}_i, P_i) \text{ e } \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$$

Assumendo di fissare il numero n , le medie \hat{x}_i e le covarianze P_i delle componenti Gaussiani $p_i(\cdot)$ formulare il problema di determinare i coefficienti α_i per una data PDF $p(\cdot)$ come un problema di stima ai minimi quadrati.

Problema 5 - Il campionamento con intervallo di campionamento $T > 0$ e ZOH sull'ingresso $u(t)$ di un sistema LTI stocastico

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_c x(t) + B_c u(t) + D_c w_c(t) \\ w_c(t) &= wn(0, Q_c) \end{aligned}$$

fornisce il sistema a tempo-discreto

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A x_k + B u_k + w_k \\ w_k &= wn(0, Q) \end{aligned}$$

con

$$A = e^{A_c T}, \quad B = \int_0^T e^{A_c r} B_c dr, \quad Q = \int_0^T e^{A_c r} \underbrace{D_c Q_c D_c^T}_{Q'} e^{A_c^T r} dr$$

Dimostrare che, posto

$$M = \begin{bmatrix} -A_c & Q' \\ 0 & A_c^T \end{bmatrix}$$

risulta che

$$e^{MT} = \begin{bmatrix} E_1 & E_{12} \\ 0 & E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-A_c T} & e^{-A_c T} Q \\ 0 & e^{A_c^T T} \end{bmatrix}$$

da cui si può quindi ricavare

$$Q = E_1^{-1} E_{12}$$

Per la dimostrazione, si sfrutti il fatto che, definito $E(t) \triangleq e^{Mt}$, valgono le seguenti proprietà:

1. $\dot{E}(t) \triangleq \frac{d}{dt} E(t) = M E(t)$
2. se $M = \begin{bmatrix} M_1 & M_{12} \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}$, allora $E(t)$ preserva la stessa forma triangolare a blocchi cioè $E(t) = \begin{bmatrix} E_1(t) & E_{12}(t) \\ 0 & E_2(t) \end{bmatrix}$